12^a Lista de exercícios de Análise Real

1. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em um intervalo I. Mostre que f satisfaz a condição de Lipschitz $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ para quaisquer $x, y \in I$ (e k uma constante positiva), se e somente se, $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$.

2. Seja f uma função contínua em $I = [a, b]$ e derivável em todo $x \in (a, b)$ de forma que $|f'(x)| \leq k < 1$ para qualquer $x \in (a, b)$. Mostre que a função φ definida em I por $\varphi(x) = x + kf(x)$ é injetora.
Sugestão: Use o exercício anterior.

3. Se f e g são funções definidas em toda a reta real, que satisfazem

$$g(x) = xf(x) + 1, \qquad g(x + y) = g(x)g(y) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, então mostre que g é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e além disso, $g'(x) = g(x)$.

4. Seja f uma função definida em um intervalo $I = (a, b)$. Mostre que f é diferenciável (derivável) em um ponto $c \in I$, se e somente se, existe uma função φ, contínua em c, tal que

$$f(x) = f(c) + \varphi(x)(x - c),$$

para todo $x \in I$.

5. Seja f uma função definida em um intervalo $I = (a, b)$. Mostre que f é diferenciável em um ponto $c \in I$, se e somente se, existem uma constante L e uma função r, definida nas proximidades de 0, que satisfazem

$$f(c + h) = f(c) + Lh + r(h), \qquad \text{com} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

6. (Versão simplificada da regra de L'Hospital) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções deriváveis com derivadas contínuas em $c \in (a, b)$. Se $f(c) = g(c) = 0$ com $g'(c) \neq 0$ então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $f'(a) = f'(b)$ então mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c)$.
Sugestão: Considere primeiro o caso em que $f'(a) = f'(b) = 0$ e mostre que a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se $x \neq a$ e $g(a) = 0$, atinge seu máximo ou seu mínimo em um ponto $c \in (a, b)$. Para o caso geral, considere a função auxiliar $g(x) = f(x) - xf'(a)$.

8. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo I. Se existe $\alpha > 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ para quaisquer $x, y \in I$, então f é derivável e possui derivada nula em todos os pontos $c \in I$.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $\mathbb{R}$. Suponha que f satisfaz $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todos $\alpha, x \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(x) = f'(0)x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

10. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I, e duas vezes derivável em um ponto $a \in int(I)$. Mostre que

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a)}{h^2},$$

e também

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2}.$$

11. Uma função f é dita convexa em um intervalo $I = [a, b]$ se para quaisquer $t \in [0, 1]$ e $x, y \in I$,

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y).$$

Seja f uma função definida em $I = [a, b]$ e derivável em (a, b). Mostre que se f é convexa então $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$ para quaisquer $x, y \in (a, b)$.

12. Seja f uma função contínua e derivável em $I = [a, b]$, de forma que $f''(x)$ existe em todo $x \in (a, b)$. Mostre que f é convexa em $[a, b]$, se e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

13. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx = 0$;

ii) Se f é contínua em um ponto c, então $f(c) = 0$;

iii) $X = \{x \in [a, b]; \quad f(x) \neq 0\}$ tem interior vazio.

14. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f não é identicamente nula, então

$$\int_a^b |f(x)|dx > 0.$$

15. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que $|f|$ é integrável e além disso,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

16. Considere a função f dada por

$$\begin{array}{rcl} f:[0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & f(x)=x. \end{array}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome a partição $P = \left\{\frac{m}{n}, \quad m \in \{0,1,2,\ldots,n\}\right\}$ do intervalo $[0,1]$. Mostre que $S(f,P) - s(f,P) = \frac{1}{n}$. Conclua que f é integrável em $[0,1]$.

17. Dê exemplo de uma função integrável que seja descontínua em um conjunto infinito.

18. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas com $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Defina $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ g(x) & \text{se} \quad x \in [a,b] - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prove que

$$\underline{\int_a^b} \varphi(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} \varphi(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Conclua que φ é integrável se e somente se $f = g$.

19. Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, $\varphi : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to [a,b]$ derivável e $c \in [a,b]$. Prove que as afirmações a seguir são equivalentes:

i) $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ para todo $t \in [a,b]$ e $\varphi(t_0) = c$;

ii) $\varphi(t) = c + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(\varphi(s))ds$ para todo $t \in [a,b]$.

20. Seja $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que:

i) Se f é par então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$;

ii) Se f é ímpar então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

21. Se $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ são integráveis, então

$$\int_0^2 (x-1)f((x-1)^2)dx = 0 = \int_0^\pi g(\operatorname{sen} x)\cos x dx.$$

22. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, e $m = \frac{a+b}{2}$, então prove que

$$f(b) + f(a) = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(t) + (t-m)f'(t)dt.$$

23. Dadas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções limitadas, defina as funções $(f \wedge g)$ e $(f \vee g)$ por $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ e $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ para todo $x \in [a, b]$.

i) Prove que se f e g são integráveis, então $(f \wedge g)$ e $(f \vee g)$ são integráveis.

ii) Dê um contra-exemplo de forma que $(f \wedge g)$ e $(f \vee g)$ são integráveis, mas f e g não são.

iii) Prove que se uma das funções f ou g é integrável e $(f \wedge g)$ e $(f \vee g)$ são integráveis, então a outra função g ou f respectivamente, é integrável.

24. (**Desigualdade de Hölder em** L^2). Prove que se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são integráveis, então

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \leq \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

25. (**Desigualdade de Minkowski em** L^2). Prove que se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são integráveis, então

$$\left[\int_a^b [f(t) + g(t)]^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_a^b [f(t)]^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b [g(x)]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$