1^a Lista de exercícios de Fundamentos de Cálculo

1. Para quaisquer conjuntos A, B e C, mostre que valem as seguintes propriedades:
a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. Dê exemplos para mostrar que não vale a lei do cancelamento para a união e a intersecção de conjuntos, isto é,
a) $A \cup B = A \cup C \quad \not\Rightarrow \quad B = C$,
b) $A \cap B = A \cap C \quad \not\Rightarrow \quad B = C$.

3. Mostre as leis de DeMorgan,
a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$,
b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

4. Mostre as leis distributivas,
a) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$,
b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

5. Mostre que
a) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$,
b) $A \cup (B - C) \supset (A \cup B) - (A \cup C)$,
e dê um exemplo para mostrar que não vale a inclusão contrária em (b).

6. Se $A, B \subset X$, então mostre que,
a) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$,
b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

7. Se $A \subset X$, então mostre que, $A = (A^C)^C$.

8. Sejam A e B dois subconjuntos de X. Mostre que $A \subset B$, se e somente se, $B^C \subset A^C$.

9. Mostre as seguintes propriedades para quaisquer $x, y, z, a, b \in \mathbb{K}$:

i) $-(-x) = x$;

ii) $x = 0$, se e somente se, $-x = 0$;

iii) $x + z = y + z$, se e somente se, $x = y$;

iv) $x + a = y + b$, se e somente se, $x - b = y - a$;

v) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$;

vi) $-(xy) = (-x)y = x(-y)$;

vii) $-(x+y) = (-x) + (-y) = -x - y$;

viii) $-(x-y) = y - x$;

ix) se $x \neq 0$, então $(x^{-1})^{-1} = x$;

x) $x = 1$, se e somente se, $x^{-1} = 1$;

xi) $\frac{x}{1} = x$;

xii) se $x, y \neq 0$, então $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$;

xiii) se $y \neq 0$, então $\frac{1}{y} = y^{-1}$;

xiv) se $b, y \neq 0$, então $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, se e somente se, $xb = ay$;

xv) se $b, y \neq 0$, então $\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b} = \frac{xa}{yb}$;

xvi) se $b, y \neq 0$, então $\frac{x}{y} + \frac{a}{b} = \frac{xb+ay}{yb}$;

xvii) se $y, a, b \neq 0$, então $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{a}{b}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{b}{a} = \frac{xb}{ya}$;

xviii) se $y \neq 0$, então $xy = zy$, se e somente se, $x = z$;

xix) $xy = 0$, se e somente se, $x = 0$ ou $y = 0$.

10. Considerando a relação $<$ definida sobre um corpo $\mathbb{K}$ por

$$x < y \qquad \Leftrightarrow \qquad (y - x) \in P,$$

mostre que para quaisquer $x, y, z, a, b \in \mathbb{K}$,

i) se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$;

ii) se $x \neq y$, então $x < y$ ou $y < x$;

iii) $x + y < z + y$, se e somente se, $x < z$;

iv) $x + a < y + b$, se e somente se, $x - b < y - a$;

v) $x < y$ e $a < b$, então $x + a < y + b$;

vi) se $x \neq 0$, então $0 < x^2$;

vii) $0 < 1$;

viii) se $0 < x$, se e somente se, $0 < x^{-1}$;

ix) se $0 < x < y$, se e somente se, $0 < y^{-1} < x^{-1}$;

$x)$ se $0 < z$ então, $xz < yz$, se e somente se, $x < y$;

$xi)$ se $z < 0$ então, $xz < yz$, se e somente se, $y < x$;

$xii)$ se $0 < y$ e $0 < b$, então $\frac{x}{y} < \frac{a}{b}$, se e somente se, $xb < ay$.