3^a Prova de Análise Real

Matemática - 4^o ano - 11/03/2024

Nome: ____

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: ________
Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso $\frac{100}{6} \approx 16,67$.

---

1. Sejam A e F subconjuntos de $\mathbb{R}$ com A aberto e F fechado. Usando as definições de ponto interior e de ponto aderente em pelo menos um dos itens, mostre que

$i)$ $A - F = \{x; \quad x \in A \quad \text{e} \quad x \notin F\}$ é aberto.

$ii)$ $F - A = \{x; \quad x \in F \quad \text{e} \quad x \notin A\}$ é fechado.

---

2. Sejam $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado, e $w \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto $w + F = \{w + b; b \in F\}$ é fechado.

---

3. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Mostre que se X é aberto então X é não enumerável.

---

4. Sejam $m, n \in \mathbb{R}$ dois números reais fixados. Usando a definição de limite mostre que $\lim\limits_{x \to a} mx + n = ma + n$.

---

5. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, então mostre que $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = LM$.

---

6. Considere o Critério das Sequências para o limite de funções:

> Existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, se e somente se, para toda sequência (x_n) com $x_n \in (X - \{a\})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$, existe o limite $\lim f(x_n)$.

Estabeleça a negação deste critério e use esta negação para mostrar que não existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ para a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \end{aligned}$$

qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

Para toda esta prova, considere $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.