2^a Prova de Análise Real

Matemática - 4^o ano - 05/02/2024

---

1. Mostre que a sequência (x_n) de números reais,

$$\left(1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \dots\right),$$

definida por $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, converge.

Solução: **Modo 1: (Reescrevendo o termo x_n)** Notemos que na sequência dada,

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma,

$$2x_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}},$$

e portanto

$$x_n = 2x_n - x_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Como $\lim 2 = 2$ e $\lim \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ então $\lim x_n = \lim 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = \lim 2 - \lim \frac{1}{2^{n-1}} = 2$. Assim segue que (x_n) é uma sequência convergente com $\lim x_n = 2$.

Modo 2: (Usando resultados conhecidos) Vamos mostrar que (x_n) é uma sequência crescente e limitada (superiormente). Claramente para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = x_{n+1}. \end{aligned}$$

Segue então que a sequência (x_n) é crescente. Agora, também para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{n-2}}\right) \\ &< 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x_n\right). \end{aligned}$$

Segue que $2x_n - x_n < 2$, donde $x_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência (x_n) é então limitada superiormente. Segue que (x_n) é crescente e limitada superiormente e portanto convergente.

$\blacksquare$

2. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de números reais com $\lim x_n = L$ e $\lim y_n = M$. Mostre que $\lim(x_n y_n) = LM$.

Solução: Suponha então $\lim x_n = L$ e $\lim y_n = M$. Para provar que $\lim(x_n y_n) = LM$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Como (x_n) é uma sequência convergente, então é também uma sequência limitada. Desta forma, existe $C \in \mathbb{R}$ com $C > 0$, de forma que

$$|x_n| < C, \qquad \text{para todo} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, do fato de que (x_n) converge, então para o número $\frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}, \qquad \text{para todo} \qquad n > n_1,$$

e do fato de que (y_n) converge, então para o número $\frac{\varepsilon}{2|C|} > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$|y_n - M| < \frac{\varepsilon}{2C}, \qquad \text{para todo} \qquad n > n_2.$$

Nestes termos, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, se $n > n_0$ então $n > n_1$ e $n > n_2$. Assim para todo $n > n_0$, temos que

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - LM| &= |x_n y_n - x_n M + x_n M - LM| \\
&\leq |x_n y_n - x_n M| + |x_n M - LM| \\
&= |x_n||y_n - M| + |M||x_n - L| \\
&< C\frac{\varepsilon}{2C} + |M|\frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \left[\frac{|M|}{|M|+1}\right]\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Segue da definição de convergência de sequências que $\lim x_n y_n = LM$. ■

---

3. Se (x_n) é uma sequência de números reais que satisfaz $\lim x_n = \infty$, mostre que $\lim \dfrac{C}{x_n} = 0$, qualquer que seja $C \in \mathbb{R}$.

Solução: Seja $C \in \mathbb{R}$ arbitrário e suponha que $\lim x_n = \infty$. Para provar que $\lim \frac{C}{x_n} = 0$, tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Como $\lim x_n = \infty$, então para o número $\frac{|C|+1}{\varepsilon}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$0 < \frac{|C|+1}{\varepsilon} < x_n, \qquad \text{para todo} \qquad n > n_0.$$

Desta forma, para todo $n > n_0$ temos que $|\frac{1}{x_n}| = \frac{1}{x_n} < \dfrac{\varepsilon}{|C|+1}$ e portanto

$$\left|\frac{C}{x_n}\right| = \frac{|C|}{|x_n|} < |C|\left[\frac{\varepsilon}{|C|+1}\right] = \left[\frac{|C|}{|C|+1}\right]\varepsilon < \varepsilon.$$

Segue da definição de convergência de sequências que $\lim \dfrac{C}{x_n} = 0$. ■

---

4. Seja (x_n) uma sequência de números reais. Suponha que as subsequências $(x_1, x_3, x_5, x_7, \dots)$ e $(x_2, x_4, x_6, x_8, \dots)$ convergem para o mesmo limite L. Mostre que então a sequência (x_n) também converge para L.

Solução: Para provar que (x_n) converge, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Como (x_{2n}) é uma sequência convergente para L, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$|x_{2n} - L| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \qquad 2n > n_1.$$

Também, como (x_{2n+1}) é uma sequência que converge para L, então existe $n_2 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$|x_{2n+1} - L| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \qquad 2n+1 > n_2.$$

Assim, tomando $n_0 > \frac{1}{2}\max\{n_1, n_2\}$, temos que para todo $n > n_0$, então $2n > 2n_0 > n_1$ e $2n + 1 > 2n_0 + 1 > n_2 + 1 > n_2$ simultaneamente, e portanto

$$|x_n - L| < \varepsilon.$$

Segue que (x_n) converge para L. ■

---

5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ números reais quaisquer. Mostre que a função afim

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax + b \end{aligned}$$

leva sequência de Cauchy, em sequência de Cauchy. Dito de outra forma, se (x_n) é uma sequência de Cauchy, mostre que a sequência (y_n) dada por $y_n = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, também é sequência de Cauchy.

Solução: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy, e defina $y_n = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo f a função afim dada por $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Para provar que (y_n) é uma sequência de Cauchy, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, então para o número $\dfrac{\varepsilon}{|a|+1} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{|a|+1}, \qquad \text{para todos} \qquad m, n > n_0.$$

Desta forma, para todos $m, n > n_0$, temos

$$\begin{aligned} |y_m - y_n| &= |f(x_m) - f(x_n)| \\ &= |ax_m + b - ax_n - b| \\ &= |a||x_m - x_n| \\ &< |a| \left[\frac{\varepsilon}{|a|+1}\right] = \left[\frac{|a|}{|a|+1}\right] \varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

Segue da definição de sequência de Cauchy que (y_n) é uma sequência de Cauchy. ■

---

6. Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries convergentes de números reais. Mostre que $\sum(x_n + y_n)$ converge, e além disso,

$$\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n.$$

Solução: Como $\sum x_n$ converge, então da definição de convergência de séries, a sequência das somas parciais (X_k), dada por

$$X_k = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k$$

é uma sequência convergente. Seja M este limite, isto é, $\sum x_n = \lim X_k = M$.

Também, como $\sum y_n$ converge, então da definição de convergência de séries, a sequência das somas parciais (Y_k), dada por

$$Y_k = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_k$$

é uma sequência convergente. Seja N este limite, isto é, $\sum y_n = \lim Y_k = N$.

Seja (S_k) a sequência das somas parciais de $(x_n + y_n)$, isto é,

$$S_k = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + \cdots + (x_k + y_k).$$

Para mostrar que $\sum(x_n + y_n)$ converge, precisamos mostrar que (S_k) é uma sequência convergente. Para isso, basta ver que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_k &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + \cdots + (x_k + y_k) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k) + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_k) = X_k + Y_k. \end{aligned}$$

Como (X_k) e (Y_k) são duas sequências convergentes então existe o limite $\lim(X_k + Y_k)$ e além disso,

$$\lim X_k + Y_k = \lim X_k + \lim Y_k.$$

Sendo assim,

$$\lim S_k = \lim(X_k + Y_k) = \lim X_k + \lim Y_k = M + N,$$

provando que (S_k) é uma sequência convergente e portanto $\sum(x_n + y_n)$ é uma série convergente. Além disso,

$$\sum(x_n + y_n) = \lim S_k = \lim X_k + \lim Y_k = \sum x_n + \sum y_n.$$

$\blacksquare$

Para toda esta prova, considere $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.