2^a Prova de Análise Real

Matemática - 4^o ano - 05/02/2024

Nome: ____

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: __________
Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso $\frac{100}{6} \approx 16,67$.

---

1. Mostre que a sequência (x_n) de números reais,

$$\left(1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \dots\right),$$

definida por $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, converge.

---

2. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de números reais com $\lim x_n = L$ e $\lim y_n = M$. Mostre que $\lim(x_n y_n) = LM$.

---

3. Se (x_n) é uma sequência de números reais que satisfaz $\lim x_n = \infty$, mostre que $\lim \dfrac{C}{x_n} = 0$, qualquer que seja $C \in \mathbb{R}$.

---

4. Seja (x_n) uma sequência de números reais. Suponha que as subsequências $(x_1, x_3, x_5, x_7, \dots)$ e $(x_2, x_4, x_6, x_8, \dots)$ convergem para o mesmo limite L. Mostre que então a sequência (x_n) também converge para L.

---

5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ números reais quaisquer. Mostre que a função afim

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax + b \end{aligned}$$

leva sequência de Cauchy, em sequência de Cauchy. Dito de outra forma, se (x_n) é uma sequência de Cauchy, mostre que a sequência (y_n) dada por $y_n = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, também é sequência de Cauchy.

---

6. Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries convergentes de números reais. Mostre que $\sum(x_n + y_n)$ converge, e além disso,

$$\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n.$$

Para toda esta prova, considere $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.