1^a Prova de Análise Real

Matemática - 4^o ano - 16/10/2023

Nome: ____

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: ________
Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso $\frac{100}{6} \approx 16,67$.

---

1. Sejam A, B e C conjuntos arbitrários. Mostre as leis distributivas,
a) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$,
b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

Solução: Para provar o item (a), vamos mostrar as duas inclusões simultaneamente.

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) - C \quad & \Leftrightarrow \quad x \in (A \cap B) \quad \text{e} \quad x \notin C \\
& \Leftrightarrow \quad x \in A \quad \text{e} \quad x \in \cap B \quad \text{e} \quad x \notin C \\
& \Leftrightarrow \quad x \in (A - C) \quad \text{e} \quad x \in \cap (B - C) \\
& \Leftrightarrow \quad x \in (A - C) \cap (B - C).
\end{aligned}$$

Para o item (b), vamos mostrar separadamente as duas inclusões. Suponha primeiro $x \in (A \cup B) - C$ e então $x \in (A \cup B)$ e $x \notin C$. Segue que $x \in A$ ou $x \in B$. Caso $x \in A$, como também $x \notin C$, temos que $x \in (A - C) \subset (A - C) \cup (B - C)$. Caso $x \in B$, como também $x \notin C$ então $x \in (B - C) \subset (A - C) \cup (B - C)$. Segue que $(A \cup B) - C \subset (A - C) \cup (B - C)$.

Para a inclusão contrária, notemos que como $A \subset (A \cup B)$ e, então $(A - C) \subset (A \cup B) - C$ e também como $B \subset (A \cup B)$, então $(B - C) \subset (A \cup B) - C$. Desta forma como $(A - C) \subset (A \cup B) - C$ e também $B \subset (A \cup B)$, então $(A - C) \cup (B - C) \subset (A \cup B) - C$. Temos portanto a igualdade desejada. ■

---

2. Considere a função

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R} - \{1\} \quad & \rightarrow \quad \mathbb{R} - \{1\} \\
x \quad & \mapsto \quad f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}.
\end{aligned}$$

Mostre que f é bijetora e obtenha a expressão para a inversa f^{-1}.

Solução: **Modo 1: (Usando as definições de injetividade e de sobrejetividade)** Para mostrar que f é injetiva, suponha $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$ de forma que $f(x) = f(y)$. Então

$$\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{y + 1}{y - 1},$$

isto é,

$$(x+1)(y-1) = (y+1)(x-1),$$

e portanto

$$xy + y - x - 1 = yx + x - y - 1.$$

Segue que $y - x = x - y = -(y - x)$, e esta igualdade só pode ser verdadeira se ambos os membros forem nulos. Assim, $y - x = 0$, e portanto $x = y$ e f injetora.

Para mostrar que f é sobrejetora, seja $y \in \mathbb{R} - \{1\}$ arbitrário. Queremos mostrar que existe $x \in [0, \infty)$ de forma que $f(x) = y$ ou ainda $\frac{x+1}{x-1} = y$. Usaremos esta igualdade desejada para obter este x. Desta forma, queremos encontrar x de forma que

$$x + 1 = y(x - 1) = xy - y,$$

au ainda,

$$(1 - y)x = x - xy = -y - 1,$$

donde $x = \dfrac{-y-1}{1-y} = \dfrac{y+1}{y-1}$.

Como $y \neq 1$, então um tal x existe e além disso, $x \neq 1$ pois o numerador da fração jamais se iguala ao denominador. Segue que a cada $y \in \mathbb{R} - \{1\}$, existe $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ dado por $x = \dfrac{y+1}{y-1}$, de forma que $f(x) = y$. Portanto f é também sobrejetora.

O processo que usamos para provar que f é sobrejetora, já obtém a expressão para a inversa, pois $y = f(x)$ se e somente se $x = f^{-1}(y)$. Segue que $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Modo 2: (Usando resultados conhecidos) Vamos mostrar que $(f \circ f)(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. De fato, dado $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) = f(f(x)) &= \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} \\ &= \frac{\frac{(x+1)+(x-1)}{x-1}}{\frac{(x+1)-(x-1)}{x-1}} = \frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = \frac{2x}{2} = x.\end{aligned}$$

Segue que $(f \circ f)(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, e assim, f admite uma inversa pela esquerda, sendo f a inversa à esquerda, e uma inversa pela direita sendo f também a inversa à direita. Segue que f é bijetora e além disso a inversa f^{-1} é exatamente a inversa pela esquerda (que coincide com a inversa pela direita), isto é, $f^{-1}(x) = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. $\blacksquare$

---

3. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que $f(X) - f(A) \subset f(X - A)$, para qualquer $A \subset X$. Dê um contraexemplo para mostrar que a inclusão contrária não é válida.

Solução: Seja $y \in f(X) - f(A)$. Então $y \in f(X) = Im(f)$ e $y \notin f(A)$. Existe portanto $x \in D(f) = X$ de forma que $f(x) = y$. Mais ainda, $x \notin A$ pois $f(x) = y \notin A$. Logo $x \in X - A$ e desta forma, $f(x) \in f(X - A)$, isto é, $y \in f(X - A)$ e então $f(X) - f(A) \subset f(X - A)$.

Um contraexemplo para invalidar a inclusão contrária pode ser conseguido com a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2, \end{aligned}$$

e consideremos o conjunto $A = (0, \infty)$. Neste caso, temos $f(X) = Im(f) = [0, \infty)$, $f(A) = f([0, \infty)) = [0, \infty)$ donde $f(X) - f(A) = \emptyset$. Por outro lado, $X - A = \mathbb{R} - [0, \infty) = (-\infty, 0)$ e então $f(X - A) = f((-\infty, 0)) = (0, \infty)$. Claramente $f(X - A) = (0, \infty) \not\subset \emptyset = f(X) - f(A)$. ■

---

4. Seja X um conjunto finito. Então

i) se existir uma função injetora $f : X \to X$, mostre que f é também sobrejetora;

ii) se existir uma função sobrejetora $g : X \to X$, mostre que g é também injetora.

Solução: (i) Suponha f injetora, e suponha (por contradição) que f não seja sobrejetora, isto é, existe $x_0 \in Cd(f) = X$ de forma que $x_0 \notin Im(f)$. Assim, $Im(f) \subsetneq X$, e a função

$$\begin{aligned} f_2 : X &\to Im(f) \subsetneq X \\ x &\mapsto f_2(x) = f(x), \end{aligned}$$

é uma bijeção entre um conjunto finito X e o subconjunto próprio $Im(f)$ de X. Uma contradição.

(ii) **Solução 1 (Por contradição):** Suponha g sobrejetora e suponha (por contradição) que g não seja injetora. Então existem $x, y \in X$ com $x \neq y$ e $f(x) = f(y)$. Assim, a função

$$\begin{aligned} g_2 : X - \{y\} &\to X \\ x &\mapsto g_2(x) = g(x), \end{aligned}$$

continua sobrejetora, e como o domínio $X - \{y\}$ é finito, segue que o contradomínio X é finito e o número de elementos do contadomínio X é menor ou igual do que o número de elementos do domínio $X - \{y\}$. Uma contradição.

(ii) **Solução 2 (Demonstração direta usando o item anterior):** Suponha g sobrejetora. Então g admite uma inversa pela esquerda, isto é, existe $f : X \to X$ de forma que $(f \circ g)(x) = x$ para todo $x \in X$. Mas assim, esta função f possui inversa pela direita e então f é injetora. Segue da primeira parte que f é também sobrejetora, e portanto bijetora. Desta forma, f possui uma única inversa pela direita, uma única inversa pela esquerda e estas inversas coincidem. Como g é a inversa pela direita de f, segue que g é também a inversa pela esquerda de f, isto é, $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in X$. Logo g admite uma inversa pela direita e portanto g é injetora. ■

---

5. Sejam X um cojunto não enumerável, Y um conjunto infinito enumerável e Z um conjunto finito. Classifique em verdadeiro ou falso as afirmações (justificando adequadamente):

a) $X - Y$ é não enumerável.

b) $Z - (X \cup Y)$ é não enumerável.

c) $(X \cap Y) - Z$ é finito.

d) $Y \cup Z$ é enumerável.

Solução: (a): Verdadeiro. Se $(X - Y)$ fosse enumerável, então $X = (X - Y) \cup Y$ também seria enumerável pois é a união de conjuntos enumeráveis. Isto contradiz a hipótese.

(b): Falso. Como $Z - (X \cup Y) \subset Z$ e todo subconjunto de um conjunto finito é também finito, então $Z - (X \cup Y)$ é finito e portanto enumerável.

(c): Falso. Basta exibir um contraexemplo. Tomando $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{N}$ e $Z = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ então $(X \cap Y) - Z = (\mathbb{R} \cap \mathbb{N}) - \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\} = \mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\} = \{n+1, n+2, n+3, n+4, \ldots\}$, donde $(X \cap Y) - Z$ não é finito.

(d): Verdadeiro. Como Y é enumerável e Z é enumerável, segue que $Y \cup Z$ é enumerável, pois a união de conjuntos enumeráveis é enumerável. ■

---

6. Sejam X um conjunto infinito e Y um conjunto finito. Mostre que existe uma função sobrejetiva $f : X \to Y$ e uma função injetiva $g : Y \to X$.

Solução: Como X é um conjunto infinito, existe um subconjunto $A \subset X$ infinito enumerável, e sendo Y finito, existem bijeções

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\to A \subset X \\ k &\mapsto \varphi(k) = x_k \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \eta : I_n &\to Y \\ k &\mapsto \eta(k) = y_k \end{aligned}$$

Escolhemos então

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} y_k & \text{se} \quad x = x_k \in A \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, n, \\ y_1 & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

que é uma função sobrejetiva, pois cada $y_k \in Y$ com $k = 1, \ldots, n$, admite um $x_k \in A \subset X$ que satisfaz $y_k = f(x_k)$.

Também escolhemos a função

$$\begin{aligned} g : Y &\to X \\ y_k &\mapsto g(y_k) = x_k \end{aligned}$$

que é injetiva em virtude da bijeção φ. De fato, dados $y_i, y_j \in Y$ com $g(y_i) = g(y_j)$ temos que $x_i = x_j$ e então $\varphi(i) = \varphi(j)$. Da bijetividade de φ, temos $i = j$, o que acarreta $y_i = y_j$. ■