Exercícios Extras - Princípio de Indução Finita

1. Usando o Princípio de Indução Finita, prove as igualdades

i) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;

ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$;

iii) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

2. Considerando $a \in (0, \infty)$ mostre que $\ln a^n = n \ln a$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

3. Considerando $a \in \mathbb{R}$ e a definição de potência natural

$$a^n = \begin{cases} a & \text{se} \quad n = 1 \\ a \cdot a^{n-1} & \text{se} \quad n \neq 1, \end{cases}$$

mostre que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,

i) $(ab)^n = a^n b^n$;

ii) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

iii) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Sugestão: Use indução sobre n qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$.