11^a Lista de exercícios de Análise Real

1. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em $a \in X \cap X'$. Usando obrigatoriamente o limite quando $h \to 0$, mostre que também são deriváveis em a as funções $(f+g)$, (cf) qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$, (fg) e $(\frac{f}{g})$ desde que $g(a) \neq 0$. Além disso,

i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;

ii) $(cf)'(a) = cf'(a)$;

iii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

iv) $(\frac{f}{g})'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$.

2. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $f(X) \subset Y$. Se f é derivável em $a \in X \cap X'$ e g é derivável em $f(a) \in Y \cap Y'$, usando o limite quando $h \to 0$, mostre que $(g \circ f)$ é também derivável em a. Além disso $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

3. Sejam $f, g, k : X \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in X$. Se em um ponto $a \in X \cap X'$ tem-se que $f(a) = h(a)$ e existem $f'(a) = h'(a)$ então $g'(a)$ existe e além disso, $g'(a) = f'(a) = h'(a)$.

4. Seja $a \in X$ um ponto de máximo local para a função $f : X \to \mathbb{R}$. Mostre que se f possui derivada à direita em a então $f'_+(a) \leq 0$. Mostre que se f possui derivada à esquerda em a então $f'_-(a) \geq 0$.

5. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial. Mostre que se a é raiz de multiplicidade n de p então a é raiz de $p^{(n-1)}$, isto é, da derivada de ordem $n-1$ de p.

6. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se f é derivável no ponto a então $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$. Entretanto, a existência do limite acima não garante sequer que f seja contínua em a. Também não garante que f seja derivável em a, mesmo quando f for contínua em a (dê contra-exemplos).

7. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $a \in X \cap X'$, defina $g : X \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{se} \quad x \neq a \\ L & \text{se} \quad x = a. \end{cases}$$

Mostre que g é contínua se, e somente se, existe $f'(a)$ e $f'(a) = L$.

8. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em um intervalo I. Mostre que entre duas raízes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f.

9. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $f'(a) = f'(b)$ então mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c)$. Faça a interpretação geométrica.
Sugestão: Considere primeiro o caso em que $f'(a) = f'(b) = 0$ e mostre que a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se $x \neq a$ e $g(a) = 0$, atinge seu máximo ou seu mínimo em um ponto $c \in (a, b)$. Para o caso geral, considere a função auxiliar $g(x) = f(x) - xf'(a)$.

10. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas e deriváveis no intervalo (a, b). Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$.

11. Seja f uma função ímpar e derivável em toda a reta real. Mostre que para qualquer $b \in \mathbb{R}$ existe um número $c \in (-b, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)}{b}$.

12. Seja $f : [a, a + h] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em $(a, a + h)$. Mostre que existe $t \in (0, 1)$ de forma que

$$f(a + h) = f(a) + f'(a + th) \cdot h.$$