10^a Lista de exercícios de Análise Real

1. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $a \in X$. Mostre que f é limitada em uma vizinhança de a, isto é, existem $C > 0$ e $\delta > 0$ de forma que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.

2. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $a \in X$. Mostre que também são contínuas em a as funções, $(f + g)$, (cf) para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$, (fg) e $(\frac{f}{g})$ desde que $g(a) \neq 0$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $Z_f = \{x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = 0\}$ é fechado. Conclua que se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas então $C = \{x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = g(x)\}$ é um conjunto fechado.

4. Dadas $f, g : X \to \mathbb{R}$, defina as funções $f \vee g : X \to \mathbb{R}$ e $f \wedge g : X \to \mathbb{R}$ para cada $x \in X$, por $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Mostre que se f e g são contínuas em um ponto $a \in X$ então $(f \vee g)$ e $(f \wedge g)$ também são contínuas em a.

5. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ definida em um aberto $A \subset \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, os conjuntos $L_c = \{x \in A; \quad f(x) < c\}$ e $S_d = \{x \in A; \quad f(x) > d\}$ são abertos, quaisquer que sejam $c, d \in \mathbb{R}$.

6. Uma função $f : F \to \mathbb{R}$ definida em um fechado $F \subset \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, os conjuntos $I_c = \{x \in A; \quad f(x) \leq c\}$ e $M_d = \{x \in A; \quad f(x) \geq d\}$ são fechados, quaisquer que sejam $c, d \in \mathbb{R}$.

7. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, se e somente se, $f^{-1}(A)$ é um conjunto aberto qualquer que seja o conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então para qualquer subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, temos que $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

9. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, se e somente se, $f^{-1}(F)$ é um conjunto fechado qualquer que seja o conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$.

10. Dado um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ não vazio, defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \inf\{|x - s|; \quad s \in S\}$. Prove que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Conclua que f é (uniformemente) contínua.

11. Construa uma bijeção $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja descontínua em todo ponto $a \in \mathbb{R}$.

12. (**Teorema de ponto fixo de Brouwer**) Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Prove que f possui um ponto fixo, isto é, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$.

13. Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas então $(f + g)$ é uniformemente contínua.