8^a Lista de exercícios de Análise Real

1. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. Mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, se e somente se $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - L) = 0$.

2. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então mostre que

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = L + M$;

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = LM$;

iii) $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = cL$ qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$;

iv) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ desde que $M \neq 0$.

3. Mostre diretamente da definição de limite que

i) $\lim\limits_{x\to a} c = c$, quaisquer que sejam $a, c \in \mathbb{R}$;

ii) $\lim\limits_{x\to a} x = a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

4. Seja $a \in \mathbb{R}$ arbitrário.

i) Mostre que se $|x - a| < 1$ então existe $M > 0$ tal que $|x + a| \leq M$.

ii) Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, tome $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{M}\}$ e mostre que se $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$ então $|x^2 - a^2| < \varepsilon$.

iii) Conclua que $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$.

5. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$, então mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

6. (Teorema do confronto) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ funções e $a \in X'$. Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, mostre que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

Solução: Para mostrar que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, seja $\varepsilon > 0$.

Então, para este $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$, então existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ de forma que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{para todos} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_1, a + \delta_1),$$

ou equivalentemente

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \qquad \text{para todos} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_1, a + \delta_1),$$

e também

$$|g(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{para todos} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_2, a + \delta_2),$$

ou equivalentemente

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \qquad \text{para todos} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_2, a + \delta_2).$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, temos que para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$,

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon$$

isto é,

$$|h(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta),$$

e portanto $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$. ■

7. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ com $L < M$, então mostre que existe $\delta > 0$ de forma que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (X - \{a\})$.

8. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ com $L > 0$, então mostre que existe $\delta > 0$ de forma que $f(x) > 0$ para todo $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (X - \{a\})$.

9. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e g é limitada, mostre que $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$ (Mesmo que não exista o limite de g).

10. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$.

i) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ então mostre que $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |L|$;

ii) Mostre que o recíproco não é necessariamente verdadeiro, isto é, dê um exemplo em que $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |L|$ mas não necessariamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$;

iii) Mostre que o recíproco é verdadeiro para $L = 0$, isto é, se $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = 0$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Solução: (i) Suponha que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, e para mostrar que $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |L|$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Para este ε, como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então existe $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Desta forma, para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$ temos que

$$||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \varepsilon,$$

mostrando que $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$.

(ii) Para ver que o recíproco não é verdadeiro, basta tomar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Neste caso temos $\lim_{x \to a} |f(x)| = 1 = |1|$ e no entanto nem existe sequer o limite $\lim_{x \to a} f(x)$.

(iii) Suponha agora que $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$. Para mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Para este $\varepsilon > 0$, como $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$, então existe $\delta > 0$ de forma que

$$||f(x)| - 0| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Desta forma, para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$, temos que

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = ||f(x)|| = ||f(x)| - 0| < \varepsilon,$$

mostrando que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. ■

11. (Limite da composta) Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ duas funções com $f(X) \subset Y$, $a \in X'$ e $b \in Y \cap Y'$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{y \to b} g(x) = L = g(b)$, então mostre que $\lim_{x \to a} g(f(x)) = L$.

Solução: Para provar que $\lim_{x \to a} g(f(x)) = L$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Como $\lim_{y \to b} g(y) = L$, para este $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$, de forma que

$$|g(y) - L| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad y \in (Y - \{b\}) \cap (b - \delta_1, b + \delta_1),$$

e claramente $|g(y) - L| < \varepsilon$ também para $y = b \in Y$.

Para este $\delta_1 > 0$, como $\lim_{x \to a} f(x) = b$, existe $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x) - b| < \delta_1 \qquad \text{sempre que} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Desta forma, para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$, temos que $f(x) \in (b - \delta_1, b + \delta_1)$, donde $f(x) \in Y \cap (b - \delta_1, b + \delta_1)$ e portanto $|g(f(x)) - L| < \varepsilon$, mostrando que $\lim_{x \to a} g(f(x)) = L$.
■

12. Estabeleça a negação do Critério de Cauchy para limite de funções. Use esta negação para mostrar que não existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ para a função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \quad \mapsto \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

Solução: De acordo com o Critério de Cauchy, o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, se e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x, y \in (\mathbb{R} - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Assim sendo, o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe, se e somente se, existir um $\varepsilon > 0$, de forma que para qualquer $\delta > 0$, existem $x, y \in (\mathbb{R} - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$, com $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Vamos usar agora este princípio para mostrar que não existe o limite da função f dada, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. Tomemos $\varepsilon = 1 > 0$. Para qualquer $\delta > 0$ sabemos que o intervalo $(a, a + \delta)$ possui pontos racionais e pontos irracionais, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. Sejam x e y dois pontos pertencentes a $(a, a + \delta)$ com x racional e y irracional. Nestes termos existem $x, y \in (\mathbb{R} - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$ de forma que

$$|f(x) - f(y)| = |1 - (-1)| = |2| = 2 \geq 1 = \varepsilon.$$

Com base no Critério de Cauchy, podemos então afirmar que não existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. ∎