7^a Lista de exercícios de Análise Real

1. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto, e $w \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto $w + A = \{w + a; a \in A\}$ é aberto. Se $w \neq 0$ mostre que o conjunto $wA = \{wa; a \in A\}$ é aberto.

Solução: Seja $x = w + a \in w + A$ para algum $a \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ de forma que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$. Vamos mostrar que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset w + A$. De fato, dado qualquer $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, temos que

$$w + a - \varepsilon = x - \varepsilon < y < x + \varepsilon = w + a + \varepsilon,$$

donde

$$a - \varepsilon < y - w < a + \varepsilon,$$

e portanto $(y - w) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$. Segue que $y = w + (y - w) \in w + A$, provando a inclusão desejada $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset w + A$, e mostrando que $w + A$ é aberto.

Para o conjunto wA, seja $x = wa \in wA$ para algum $a \in A$. Como A é aberto então existe $\varepsilon > 0$ de forma que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$. Como $w \neq 0$ é fixo, tomemos $\delta = |w|\varepsilon > 0$, e vamos mostrar que $(x - \delta, x + \delta) \subset wA$, sendo que para isso, vamos separar os casos $w > 0$ e $w < 0$.

Caso $w > 0$ então, dado $y \in (x - \delta, x + \delta)$, temos que

$$wa - |w|\varepsilon = x - \delta < y < x + \delta = wa + |w|\varepsilon,$$

e dividindo tudo por $w = |w| > 0$, temos

$$a - \varepsilon < \frac{y}{w} < a + \varepsilon,$$

donde $\frac{y}{w} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$. Segue que $y = w \cdot \frac{y}{w} \in wA$ e fica válida a inclusão $(x - \delta, x + \delta) \subset wA$ para o caso $w > 0$.

Se por outro lado, $w < 0$ então seja $y \in (x - \delta, x + \delta)$. Assim,

$$wa - |w|\varepsilon = x - \delta < y < x + \delta = wa + |w|\varepsilon,$$

e dividindo tudo por $w = -|w| < 0$, temos

$$a + \varepsilon > \frac{y}{w} > a - \varepsilon,$$

donde novamente $\frac{y}{w} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$, e portanto $y = w \cdot \frac{y}{w} \in xA$. Fica assim válida a inclusão $(x - \delta, x + \delta) \subset wA$ também para o caso $w < 0$.

Segue que wA é aberto. $\blacksquare$

2. Se $A, B \subset \mathbb{R}$ dois conjuntos com pelo menos um deles aberto. Mostre que o conjunto $A + B = B + A = \{a + b; a \in A, b \in B\}$ é aberto.

Solução: **Modo 1: (Usando definições)** Sem perda de generalidade, suponha B aberto. Mostraremos que $A + B \subset int(A + B)$, e para isso, considere $x \in A + B$. Então $x = a + b$ com $a \in A$ e $b \in B$. Como B é aberto existe $\varepsilon > 0$ de forma que

$$(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset B.$$

Mostraremos agora que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (a + b - \varepsilon, a + b + \varepsilon) \subset A + B.$$

De fato, dado $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (a + b - \varepsilon, a + b + \varepsilon)$, temos que

$$a + b - \varepsilon < y < a + b + \varepsilon,$$

donde

$$b - \varepsilon < y - a < b + \varepsilon,$$

o que garante que $(y - a) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset B$.

Assim, $y = a + (y - a) \in A + B$, mostrando que de fato $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A + B$, e desta forma, $x \in int(A + B)$. Isto conclui que $A + B$ é um conjunto aberto.

Modo 2: (Usando o exercício anterior e resultados) Supondo (sem perda de generalidade) B aberto, do exercício anterior $a + B$ é aberto, qualquer que seja $a \in A \subset \mathbb{R}$. Desta forma,

$$A + B = \{a + b; \quad a \in A, b \in B\} = \bigcup_{a \in A} a + B,$$

é uma reunião arbitrária de abertos e portanto é aberto. ■

3. Para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$, tem-se $int(X \cap Y) = int(X) \cap int(Y)$ e $int(X \cup Y) \supset int(X) \cup int(Y)$. Dê um exemplo para mostrar que no segundo caso não vale a inclusão contrária.

4. Para $X, Y \subset \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, e $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê um exemplo para mostrar que no segundo caso não vale a inclusão contrária.

5. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto arbitrário. Mostre que $int(X)$ é um conjunto aberto e que $\overline{X}$ é um conjunto fechado. Em outras palavras, mostre que $int(int(X)) = int(X)$ e que $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ para qualquer $X \subset \mathbb{R}$.

Solução: (i) Basta provar que $int(X) \subset int(int(X))$. Para isso, seja $x \in int(X)$. Então da definição de ponto interior existe $\varepsilon > 0$ de forma que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$. Queremos provar que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset int(X)$ e para isso, tomemos $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Seja $\varepsilon' = \varepsilon - |x - y| > 0$ já que $|x - y| < \varepsilon$. Nestes termos, dado qualquer $z \in (y - \varepsilon', y + \varepsilon')$, temos que

$$\begin{aligned} |x - z| &= |x - y + y - z| \leq |x - y| + |z - y| \\ &< |x - y| + \varepsilon' = |x - y| + \varepsilon - |x - y| = \varepsilon \end{aligned}$$

o que mostra que $z \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, e portanto $(y-\varepsilon', y+\varepsilon') \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset X$. Desta forma, $y \in int(X)$ e com isso temos a inclusão $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset int(X)$. Segue que $x \in int(int(X))$ mostrando a inclusão desejada $int(X) \subset int(int(X))$.

(ii) Basta provar que $\overline{\overline{X}} \subset \overline{X}$, e para isso, seja $x \in \overline{\overline{X}}$. Para provar que $x \in \overline{X}$ seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para este $\varepsilon > 0$, como $x \in \overline{\overline{X}}$, da definição de ponto aderente, temos que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \overline{X} \neq \emptyset$. Seja $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \overline{X}$ e seja $\varepsilon' = \varepsilon - |x-y| > 0$. Para este $\varepsilon' > 0$, como $y \in \overline{X}$, temos que $(y-\varepsilon', y+\varepsilon') \cap X \neq \emptyset$. Seja $z \in (y-\varepsilon', y+\varepsilon') \cap X$. Desta forma,

$$\begin{aligned} |x-z| &= |x-y+y-z| \leq |x-y| + |z-y| \\ &< |x-y| + \varepsilon' = |x-y| + \varepsilon - |x-y| = \varepsilon \end{aligned}$$

provando que $z \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Como também $z \in X$, temos que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$, provando que $x \in \overline{X}$ e a inclusão desejada $\overline{\overline{X}} \subset \overline{X}$. ■

6. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto arbitrário. Mostre que

i) $int(X^C) = \overline{X}^C$,

ii) $(int(X))^C = \overline{X^C}$.

Solução: (i) **Modo 1: (Usando definições)** Diretamente das definições de ponto interior e ponto aderente, temos que

$$\begin{aligned} x \in int(X^C) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset X^C \\ &\Leftrightarrow \quad \text{existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad x \notin \overline{X} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \overline{X}^C. \end{aligned}$$

Modo 2: (Usando o item (ii)**)** Levando em conta que $(int(X))^C = \overline{X^C}$ para qualquer conjunto $X \subset \mathbb{R}$, temos que $\left(int(X^C)\right)^C = \overline{(X^C)^C} = \overline{X}$. A igualdade desejada segue agora tomando o complementar em ambos os membros.

(ii) **Modo 1: (Usando definições)** Diretamente das definições de ponto interior e ponto aderente, temos que

$$\begin{aligned} x \in (int(X))^C \quad &\Leftrightarrow \quad x \notin int(X) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{para todo } \varepsilon > 0,\ (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \not\subset X \\ &\Leftrightarrow \quad \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } a \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \text{ com } a \notin X \\ &\Leftrightarrow \quad \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } a \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \text{ com } a \in X^C \\ &\Leftrightarrow \quad \text{para todo } \varepsilon > 0,\ (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X^C \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad x \in \overline{X^C}. \end{aligned}$$

Modo 2: (Usando o item (i)**)** Levando em conta que $int(X^C) = \overline{X}^C$ para qualquer conjunto $X \subset \mathbb{R}$,

$$int(X) = int((X^C)^C) = (\overline{X^C})^C,$$

e a igualdade desejada segue tomando o complementar em ambos os membros. ■

7. Mostre que $A \subset \mathbb{R}$ é aberto, se e somente se, $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$ para todo $X \subset \mathbb{R}$.

Solução: Suponha primeiro A aberto. Dado qualquer $X \subset \mathbb{R}$, para provar que $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$, provaremos (contrapositivamente) que se $x \notin \overline{A \cap X}$ então $x \notin A \cap \overline{X}$.

Seja então $x \notin \overline{A \cap X}$. Para provarmos que $x \notin A$ ou $x \notin \overline{X}$ vamos supor que $x \in A$ e provar que obrigatoriamente $X \notin \overline{X}$.

Supomos assim que $x \notin \overline{A \cap X}$ e $x \in A$. Como $x \notin \overline{A \cap X}$ então existe $\varepsilon_1 > 0$ de forma que

$$(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \cap (A \cap X) = \emptyset.$$

Também, como $x \in A$ e A é aberto, existe $\varepsilon_2 > 0$ de forma que

$$(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset A.$$

Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ temos que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$ e também $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (A \cap X) = \emptyset$. Desta forma, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, e então

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap X = ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A) \cap X = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (A \cap X) = \emptyset.$$

Segue que $x \notin \overline{X}$ como desejado, o que prova que $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$.

Para a recíproca, suponha agora que $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$ para qualquer que seja o conunto $X \subset \mathbb{R}$. Então para o conjunto $X = A^C$ temos que

$$A \cap \overline{A^C} \subset \overline{A \cap A^C} = \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

Mas como também $\overline{A^C} = (int(A))^C$, então temos que $A \cap (int(A))^C = \emptyset$ o que garante que $A \subset int(A)$ e portanto A é aberto. ■

8. Sejam A e F subconjuntos de $\mathbb{R}$ com A aberto e F fechado. Mostre que

i) $A - F = \{x; \quad x \in A \quad \text{e} \quad x \notin F\}$ é aberto.

ii) $F - A = \{x; \quad x \in F \quad \text{e} \quad x \notin A\}$ é fechado.

Solução: (i) **Modo 1: (Usando definições)** Seja $x \in A - F$. Então $x \in A = int(A)$ e $x \notin F = \overline{F}$. Da definição de ponto interior existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A$, e da (negação da) definição de ponto aderente existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \cap F = \emptyset$, donde temos que $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset F^C$.

Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, então

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A,$$

e também
$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subset F^C.$$

Nestes termos existe $\varepsilon > 0$ de forma que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (A \cap F^C) = (A - F)$. Isto prova que $x \in int(A-F)$, e que $(A-F)$ é aberto.

(i) **Modo 2: (Variação no Modo 1)** Na solução anterior, podemos substituir a expressão $x \notin F = \overline{F}$ por $x \in F^C = int(F^C)$ já que F^C é aberto. Neste caso, da definição de ponto interior, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subset F^C$. E a demonstração do Modo 1 continua normalmente.

(i) **Modo 3: (Usando resultados)** Como F é fechado, então F^C é aberto. Então $A \cap F^C$ é aberto e portanto $A - F = A \cap F^C$ é aberto.

(i) **Modo 4: (Variante do Modo 3)** Como A é aberto, então A^C é fechado. Então $(A-F)^C = A^C \cup F$ é fechado, donde $(A-F)$ é aberto.

(ii) **Modo 1: (Usando definições)** Para provar que $\overline{F-A} \subset F - A$, procederemos contrapositivamente, e para isso, seja $x \notin F - A$. Então é obrigatório que $x \notin F = \overline{F}$ ou $x \in A = int(A)$.

Se $x \notin \overline{F}$, da (negação da) definição de ponto aderente, existe $\varepsilon, > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap F = \emptyset$, e como $F - A \subset F$, então $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (F-A) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap F = \emptyset$, mostrando que $x \notin \overline{F-A}$.

Se por outro lado, $x \in int(A)$, da definição de ponto interior, existe $\varepsilon > 0$ de forma que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$, ou equivalentemente, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A^C = \emptyset$. Neste caso, como $F - A = F \cap A^C = A^C \cap F$, segue que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (F-A) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (A^C \cap F) = \big[(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A^C\big] \cap F = \emptyset$, mostrando que $x \notin \overline{F-A}$.

Segue pela contrapositiva equivalente que $\overline{F-A} \subset F - A$ e portanto $F - A$ é um conjunto fechado.

(ii) **Modo 2: (Variante no Modo 1)** Na solução anterior, podemos substituir a expressão $x \notin F = \overline{F}$ por $x \in F^C = int(F^C)$ já que F^C é aberto. Portanto no caso de $x \notin \overline{F}$ podemos proceder alternativamente com $x \in F^C = int(F^C)$. Da definição de ponto interior, segue que existe $\varepsilon > 0$ de forma que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset F^C$ o que garante que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap F = \emptyset$. A continuação é a mesma feita anteriormente.

(ii) **Modo 3: (Usando resultados)** Como A é aberto, então A^C é fechado. Então $F \cap A^C$ é fechado e portanto $F - A = F \cap A^C$ é fechado.

(ii) **Modo 4: (Variante do Modo 3)** Como F é fechado, então F^C é aberto. Então $(F-A)^C = F^C \cup A$ é aberto, donde $F - A$ é fechado. ■

9. Defina a distância entre um ponto $a \in \mathbb{R}$ e um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ como sendo
$$d(a, X) = \inf\{|x-a|; \quad x \in X\}.$$

Mostre que:

$i)$ $d(a, X) = 0$ se, e somente se, $a \in \overline{X}$.

ii) Se X é fechado então existe $b \in X$ tal que $d(a,X) = |b-a|$.

Solução: (i) Suponha primeiro que $d(a,X) = 0$, e então $\inf\{|x-a|; \quad x \in X\} = 0$. Para mostrar que $a \in \overline{X}$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Com este ε, da definição de ínfimo existe $y \in X$ de forma que $|y-a| < \varepsilon$. Logo $y \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e como também $y \in X$ temos que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Isto prova que $a \in \overline{X}$.

Suponha agora que $a \in \overline{X}$. Para provar que $\inf\{|x-a|; \quad x \in X\} = 0$, provaremos este ínfimo é menor do que qualquer número $\varepsilon > 0$. Seja então $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para este ε, como $a \in \overline{X}$, então $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Existe portanto $y \in X$ com $|y-a| < \varepsilon$. Segue que $\inf\{|x-a|; \quad x \in X\} \leq |y-a| < \varepsilon$. Isto prova que $\inf\{|x-a|; \quad x \in X\} = 0$.

(ii) Suponha X um conjunto fechado, isto é, $\overline{X} \subset X$. Como X é não vazio, então $\{|x-a|; \quad x \in X\}$ é também não vazio e limitado inferiormente (pro 0). Então o conjunto $\inf\{|x-a|; \quad x \in X\}$ admite ínfimo. Seja $L = \inf\{|x-a|; \quad x \in X\}$, e claramente $L \geq 0$.

Vamos mostrar que $a + L \in \overline{X} = X$ ou que $a - L \in \overline{X} = X$. Para isto, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para este ε, da definição de ínfimo, existe $y \in X$ de forma que $0 \leq L \leq |y-a| < L+\varepsilon$. Da desigualdade $|y-a| < L + \varepsilon$ temos que

$$-L - \varepsilon < y - a < L + \varepsilon.$$

Porém da desigualdade $L \leq |y-a|$ temos que $L \leq y-a$ ou $y-a \leq -L$. Vamos então aqui considerar os dois casos separadamente.

Caso 1: Se $L \leq y-a$, então juntando com a desigualdade anterior, temos que $L \leq y-a < L+\varepsilon$, donde obtemos $(a+L) \leq y < (a+L)+\varepsilon$. Assim claramente $(a+L)-\varepsilon < (a+L) \leq y < (a+L)+\varepsilon$, o que garante que $y \in ((a+L)-\varepsilon, (a+L)+\varepsilon)$ e como também $y \in X$, segue que $((a+L)-\varepsilon, (a+L)+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Isto prova que $a+L \in \overline{X} \subset X$. Neste caso, basta tomar $b = a+L \in X$ e temos $\inf\{|x-a|; \quad x \in X\} = L = |(a+L)-a| = |b-a|$.

Caso 2: Se $y-a \leq -L$, então juntando com a desigualdade anterior, temos que $-L-\varepsilon < y-a \leq -L$, donde obtemos $(a-L)-\varepsilon < y \leq a-L$. Assim claramente $(a-L)-\varepsilon < y \leq (a-L) < (a-L)+\varepsilon$, o que garante que $y \in ((a-L)-\varepsilon, (a-L)+\varepsilon)$ e como também $y \in X$, segue que $((a-L)-\varepsilon, (a-L)+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Isto prova que $a-L \in \overline{X} \subset X$. Neste caso, basta tomar $b = a-L \in X$ e temos $\inf\{|x-a|; \quad x \in X\} = L = |-L| = |(a-L)-a| = |b-a|$. ■

10. Seja $X = \{x\} \subset \mathbb{R}$ um conjunto unitário. Mostre que $int(X) = \emptyset$ e que $\overline{X} = X$. Conclua que X é fechado e não é aberto. Generalize para o caso $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ um conjunto finito.

11. Determine X' nos casos em que $X = \emptyset$, $X = \mathbb{R}$, $X = \{a\}$, $X = \mathbb{Q}$, $X = (a,b)$ e $X = [a,b]$.

12. Dê um exemplo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ de forma que $X \not\subset X'$ e também $X' \not\subset X$.

13. Para quaisquer conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, tem-se $(X \cup Y)' = X' \cup Y'$.

14. Para qualquer conjunto $X \subset \mathbb{R}$, mostre que $X' = \overline{X'} = \overline{X}'$ (e portanto X' é um conjunto fechado).

Solução: Primeiro mostraremos que $X' = \overline{X'}$. Claramente a inclusão $X' \subset \overline{X'}$ já é garantida. Vamos então para a inclusão contrária. Seja $x \in \overline{X'}$. Para mostrar que $x \in X'$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para este ε, como $x \in \overline{X'}$, segue da definição de ponto aderente que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap X' \neq \emptyset.$$

Existe portanto α de forma que

$$\alpha \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \quad \text{com} \quad \alpha \in X'.$$

Caso $\alpha = x$ então a demonstração terminou pois teremos neste caso $x = \alpha \in X'$ como desejado.

Caso $\alpha \neq x$, então temos claramente $0 < |\alpha - x| < \varepsilon$, e desta forma tomemos $\delta = \min\{|\alpha - x|, \varepsilon - |\alpha - x|\} > 0$. Desta forma $\delta \leq |\alpha - x|$ e também $\delta \leq \varepsilon - |\alpha - x|$. Para este $\delta > 0$, como $\alpha \in X'$, segue da definição de ponto de acumulação que

$$(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap (X - \{\alpha\}) \neq \emptyset.$$

Existe portanto β, com $\beta \neq \alpha$, de forma que

$$\beta \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \quad \text{com} \quad \beta \in X.$$

Vamos provar agora que $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ e que $\beta \neq x$. Para a inclusão indicada, suponha $y \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, isto é $|y - \alpha| < \delta$. Desta forma,

$$\begin{aligned} |y - x| &= |y - \alpha + \alpha - x| \leq |y - \alpha| + |\alpha - x| \\ &< \delta + |\alpha - x| \leq \varepsilon - |\alpha - x| + |\alpha - x| = \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ e a inclusão desejada. Para provar que $\beta \neq x$, basta ver (por contradição) que se $\beta = x$ então teremos $\delta \leq |\alpha - x| = |\alpha - \beta| < \delta$, o que é uma clara contradição.

Temos então que

$$\beta \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \quad \text{com} \quad \beta \in X \quad \text{e} \quad \beta \neq x,$$

o que garante que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (X - \{x\}) \neq \emptyset,$$

e $x \in X'$. Segue a inclusão $\overline{X'} \subset X'$ e a consequente igualdade entre os conjuntos. Como consequência disso, X' é um conjunto fechado.

Para a igualdade $\overline{X'} = \overline{X}'$ usaremos a igualdade $\overline{X} = X \cup X'$, válida para qualquer conjunto X, e o exercício anterior. Desta forma,

$$\overline{X'} = X' \cup (X')' = (X \cup X')' = \overline{X}'.$$

■

15. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto arbitrário e $X^C = \mathbb{R} - X$ o complementar de X. Mostre que $(X^C)' = (X')^C$.

Solução: Este exercício não está correto. Pelo menos não vale uma das inclusões. Basta tomar $X = (a, b)$ um intervalo da reta e temos que $X^C = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ o que nos dá $(X^C)' = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$. Por outro lado $X' = [a, b]$ e então $(X')^C = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Claramente para este caso não vale a inclusão $(X^C)' \subset (X')^C$. Talvez seja válida a inclusão contrária para qualquer X. ■

16. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Mostre que X é fechado, se e somente se, $X' \subset X$.

17. Mostre que se um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é aberto, então $X \subset X'$. Mostre que o recíproco não é verdadeiro, isto é, existe (pelo menos) um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ com $X \subset X'$ e X não é aberto.

18. Sejam F fechado e $x \in F$. Então x é ponto isolado de F se e somente se $F - \{x\}$ é ainda um conjunto fechado.

19. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dado qualquer $x \in X'$, mostre que existe uma sequência (x_n), de pontos de $(X - \{x\})$, de forma que $\lim x_n = x$.

20. Se $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família arbitrária de compactos, então $\cap K_\lambda$ ainda é compacta. Se $K_1, K_2, \ldots, K_n$ são compactos então $K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ é compacto.

21. Mostre que se $K, M \subset \mathbb{R}$ são conjuntos compactos, então $K + M = \{k + m; k \in K, m \in M\}$ é compacto.

Solução: Esta solução é baseada em um resultado verdadeiro mas não provado em sala de aula. Usaremos o Teorema:

> **Teorema:** Um conjunto K é compacto, se e somente se, qualquer sequência (x_n) de pontos de K possui uma subsequência (x_{n_j}) que converge para algum ponto de K.

Primeiro provaremos que $K + M$ é fechado. Seja então $x \in \overline{K + M}$. Como $\overline{K + M}$ é fechado, existe uma sequência (x_n) de pontos de $K + M$ de forma que $x_n \to x$. Como $x_n \in K + M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $k_n \in K$ e $m_n \in M$ de forma que $x_n = k_n + m_n$. Como K é compacto, a sequência (k_n) admite uma subsequência (k_{n_j}) que converge para algum ponto de K. Seja $k \in K$ este limite da subsequência, isto é, $(k_{n_j}) \to k$.

Para estes índices n_j, temos que $m_{n_j} = x_{n_j} - k_{n_j}$ e como $k_{n_j} \to k$ e $x_{n_j} \to x$ segue que

$m_{n_j} \to x - k$. Assim (m_{n_j}) é uma sequência de pontos de M que converge para $x - k$. Sendo M fechado, temos que obrigatoriamente $x - k \in M$ e portanto $x = k + (x - k) \in K + M$ provando que $K + M$ é fechado.

Para ver que $K+M$ é limitado, como K e M são compactos, então K e M são limitados. Segue que $K \subset [a + b]$ e $M \subset [c, d]$. Claramente dado qualquer $x = k + m \in K + M$ temos que $a \leq k \leq b$ e $c \leq m \leq d$ o que garante que $a + c \leq k + m \leq b + d$ e portanto $x \in [a + c, b + d]$. Isto prova que $K + M \subset [a + c, b + d]$ e $K + M$ é limitado.

Segue portanto que $K + M$ é compacto. ■

22. Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto e $F \subset \mathbb{R}$ é fechado então $K \cap F$ é compacto.