6^a Lista de exercícios de Análise Real

1. Seja (x_n) uma sequência convergente, com $\lim x_n = L > 0$. Mostre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $x_n > 0$ para todo $n > n_0$.

2. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências convergentes tais que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\lim x_n \leq \lim y_n$.

3. Seja (x_n) uma sequência monótona que possui uma subsequência convergente. Mostre que (x_n) é convergente.
Sugestão: Mostre que (x_n) é limtada.

4. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de Cauchy. Mostre que $(x_n + y_n)$, (cx_n) e $(x_n y_n)$ também são sequências de Cauchy qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.

5. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências (de números reais). Se $\lim x_n = -\infty$ e (y_n) é limitada superiormente, mostre que $\lim(x_n + y_n) = -\infty$.

6. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências (de números reais). Se $\lim x_n = -\infty$ e existe $c > 0$ de forma que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\lim(x_n y_n) = -\infty$.

7. Seja r um número real. Mostre que $|r| < 1$, se e somente se, $\lim r^n = 0$.

8. Sejam $a, r \in \mathbb{R}$ e considere a série de números reais dada por $\sum ar^n$. Mostre que a série converge se e somente se $|r| < 1$. Além disso, no caso de convergir, a soma é precisamente $S = \frac{a}{1-r}$.

9. Use o exercício anterior para mostrar que $0,999999\ldots = 1$.

10. Suponha que (x_n) e (y_n) são duas sequências de números reais convergentes. Então mostre que

a) $\sum(x_n + y_n)$ converge, e além disso, $\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$;

b) $\sum(x_n y_n)$ converge, mas não necessariamente, $\sum x_n y_n = \left(\sum x_n\right)\left(\sum y_n\right)$;

c) $\sum(ax_n)$ converge, e além disso, $\sum(ax_n) = a \sum x_n$ qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

11. Mostre que se $\sum x_n$ converge $\sum y_n$ diverge então $\sum(x_n + y_n)$ diverge.

12. De exemplos de séries de números reais $\sum x_n$ e $\sum y_n$ ambas divergentes com $\sum(x_n y_n)$ convergente e com $\sum(x_n y_n)$ divergente.

13. Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries convergentes de números reais positivos. Mostre que $\sum x_n y_n$ é convergente e além disso, $\sum |x_n y_n| \leq \left(\sum |x_n|\right)\left(\sum |y_n|\right)$.

14. Seja $\sum x_n$ uma série de números reais e suponha que $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = c$. Mostre que

i) Se $c < 1$ então $\sum x_n$ converge;

ii) Se $c > 1$ então $\sum x_n$ diverge.

15. (Generalização do teste da razão) Sejam $\sum x_n$ uma série de números reais não nulos e $\sum y_n$ uma série convergente de termos positivos. Se existir $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n} \qquad \text{para todo} \qquad n > n_0,$$

então $\sum x_n$ é (absolutamente) convergente. Demonstre o teste da razão como Corolário deste resultado.

16. (Generalização do teste da raiz) Sejam $\sum x_n$ uma série de números reais e $c \in (0,1)$ um número real tal que $\sqrt[n]{|x_n|} \leq c$ para todo $n > n_0 \in \mathbb{N}$. Mostre que $\sum x_n$ é (absolutamente) convergente. Demonstre o teste da raiz como Corolário deste resultado.