5^a Lista de exercícios de Análise Real

1. Sejam (x_n) e (y_n) sequências tais que $\lim x_n = L$ e $\lim y_n = M$. Mostre que

i) $\lim(x_n + y_n) = L + M$;

ii) $\lim(cx_n) = cL$ qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$;

iii) $\lim(x_n y_n) = LM$;

iv) $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{M}$ desde que $M \neq 0$;

2. Seja (x_n) uma sequência monótona. Mostre que (x_n) é limitada se e somente se ela possui uma subsequência limitada.

3. Considerando a sequência (x_n) dada por

$$x_1 = \sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \quad \text{para} \quad n \geq 1,$$

mostre que (x_n) é monótona e limitada. Conclua que (x_n) converge e determine o seu limite.

4. Considerando a sequência (x_n) dada por

$$x_1 = \sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \quad \text{para} \quad n \geq 1,$$

mostre que (x_n) é monótona e limitada. Conclua que (x_n) converge e determine o seu limite.

5. Mostre que $\lim x_n = a$, se e somente se, $\lim(x_n - a) = 0$.

6. Se $\lim x_n = a$ então mostre que $\lim |x_n| = |a|$. Dê um contra exemplo para mostrar que em geral não vale a recíproca. Mostre que a recíproca é verdadeira no caso em que $a = 0$.

7. Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim x_n = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ construa a sequência (y_n) colocando $y_n = \min\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \ldots, |x_n|\}$. Mostre que $\lim y_n = 0$.

8. Seja $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Então

a) Mostre que se $0 \leq a < b$ então $\dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n+1)b^n$.

b) Deduza que $b^n((n+1)a - nb) < a^{n+1}$.

c) Com $a = 1 + \frac{1}{1+n}$ e $b = 1 + \frac{1}{n}$, em (b), mostre que a sequência (a_n) é crescente.

d) Com $a = 1$ e $b = 1 + \frac{1}{2n}$ em (b), mostre que $a_{2n} < 4$ para todo $n \geq 1$.

e) Usando (c) e (d), mostre que também $a_{2n+1} < 4$ para todo $n \geq 1$.

f) Conclua que a sequência (a_n) converge, e que seu limite é e.

9. Sejam $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e $y_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$. Mostre que $\lim x_n y_n = 1$ e deduza disto que $\lim y_n = \frac{1}{e}$.

10. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a > b$. Mostre que $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$. Sejam a_1 e b_1 as médias aritmética e geométrica respectivamente de a e b, isto é,

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad \text{e} \qquad b_1 = \sqrt{ab}.$$

Para $n \geq 1$ defina as sequências

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \text{e} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Prove (por indução finita) que $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$ e conclua que ambas as sequências convergem. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

11. Seja $x_1 = 1$ e coloque $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Conclua que existe $a = \lim x_n$ e determine a.

12. Seja $x_1 = 1$ e coloque $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a sequência (x_n) converve e determine $a = \lim x_n$.