4^a Lista de exercícios de Análise Real

1. Mostre as seguintes propriedades para quaisquer $x, y, z, a, b \in \mathbb{K}$:

i) $-(-x) = x$;

ii) $x = 0$, se e somente se, $-x = 0$;

iii) $x + z = y + z$, se e somente se, $x = y$;

iv) $x + a = y + b$, se e somente se, $x - b = y - a$;

v) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$;

vi) $-(xy) = (-x)y = x(-y)$;

vii) $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$;

viii) $-(x - y) = y - x$;

ix) se $x \neq 0$, então $(x^{-1})^{-1} = x$;

x) $x = 1$, se e somente se, $x^{-1} = 1$;

xi) $\frac{x}{1} = x$;

xii) se $x, y \neq 0$, então $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$;

xiii) se $y \neq 0$, então $\frac{1}{y} = y^{-1}$;

xiv) se $b, y \neq 0$, então $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, se e somente se, $xb = ay$;

xv) se $b, y \neq 0$, então $\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b} = \frac{xa}{yb}$;

xvi) se $b, y \neq 0$, então $\frac{x}{y} + \frac{a}{b} = \frac{xb+ay}{yb}$;

xvii) se $y, a, b \neq 0$, então $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{a}{b}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{b}{a} = \frac{xb}{ya}$;

xviii) se $y \neq 0$, então $xy = zy$, se e somente se, $x = z$;

xix) $xy = 0$, se e somente se, $x = 0$ ou $y = 0$.

2. Considerando a relação $<$ definida sobre um corpo $\mathbb{K}$ por

$$x < y \qquad \Leftrightarrow \qquad (y - x) \in P,$$

mostre que para quaisquer $x, y, z, a, b \in \mathbb{K}$,

i) se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$;

ii) se $x \neq y$, então $x < y$ ou $y < x$;

iii) $x+y<z+y$, se e somente se, $x<z$;

iv) $x+a<y+b$, se e somente se, $x-b<y-a$;

v) $x<y$ e $a<b$, então $x+a<y+b$;

vi) se $x\neq 0$, então $0<x^2$;

vii) $0<1$;

viii) se $0<x$, se e somente se, $0<x^{-1}$;

ix) se $0<x<y$, se e somente se, $0<y^{-1}<x^{-1}$;

x) se $0<z$ então, $xz<yz$, se e somente se, $x<y$;

xi) se $z<0$ então, $xz<yz$, se e somente se, $y<x$;

xii) se $0<y$ e $0<b$, então $\frac{x}{y}<\frac{a}{b}$, se e somente se, $xb<ay$.

3. Seja $\mathbb{K}$ um corpo totalmente ordenado. Dados $x,y\in\mathbb{K}$, mostre que

i) $|xy|=|x||y|$,

ii) se $y\neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$,

iii) $|x^2|=|x|^2=x^2$.

4. Considerando a relação de ordem usual no conjunto dos números reais $\leq$, mostre que
a) **(Desigualdade de Cauchy)** Para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$, $ab\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$.
b) **(Desigualdade de Cauchy com ε)** Para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$ e $\varepsilon>0$, $ab\leq\varepsilon a^2+\frac{b^2}{4\varepsilon}$.
c) **(Desigualdade de Bernoulli)** Para qualquer $a\in\mathbb{R}$ com $a\geq -1$, e $n\in\mathbb{N}$, $(1+a)^n\geq 1+na$.
d) $\sqrt{ab}\leq\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{a+b}{2}$.

5. Seja $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ um homomorfismo (isto é, $f(x+y)=f(x)+f(y)$ e $f(xy)=f(x)f(y)$ para quaisquer $x,y\in\mathbb{Q}$). Prove que $f(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{Q}$ ou então $f(x)=x$ para todo $x\in\mathbb{Q}$.

6. Sabendo que $\mathbb{R}$ é não enumerável, dados quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$ com $a<b$, mostre que:
a) (a,b) é não enumerável.
b) $(a,b]$, $[a,b)$ e $[a,b]$ são não enumeráveis.
c) O conjunto dos números irracionais $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ é não enumerável.

7. Considerando que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é corpo, mostre que:

i) $\sqrt{2}$ é irracional;

ii) a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional;

iii) o produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

8. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito ser denso em $\mathbb{R}$ se (e somente se) qualquer intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ contém pelo menos um elemento de X. Mostre que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$. Dito de outra forma, mostre que qualquer intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ contém pelo menos um número racional e pelo menos um número irracional.

9. Considerando o corpo ordenado dos números racionais $\mathbb{Q}$, mostre que o conjunto $X = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q}; \quad x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ não admite supremo nem ínfimo em $\mathbb{Q}$.
Sugestão: Faça uma demonstração por contradição, isto é, suponha que existe $b = \sup\{X\} \in \mathbb{Q}$ e obtenha a contradição. O mesmo para o ínfimo.