Atividade APCC de Análise Real - Ano letivo 2023

1. (Convergência da sequência dos pontos médios) Sejam x_0 e x_1 dois números reais arbitrários com $x_0 < x_1$. Para $n \geq 2$ defina x_n como sendo o ponto médio entre x_{n-1} e x_{n-2}, isto é, $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$. O objetivo deste exercício é provar que (x_n) converge.

i) Mostre que

$$x_{2n} = x_0 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}\right)(x_1 - x_0) \qquad \text{e} \qquad x_{2n+1} = x_1 - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}\right)(x_1 - x_0)$$

para todo $n \geq 1$.

ii) Conclua que as subsequências $(x_0, x_2, x_4, x_6, x_8, \dots)$ e $(x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \dots)$ convergem, ambas para $x_0 + \frac{2}{3}(x_1 - x_0)$.

iii) Conclua que (x_n) converge para $x_0 + \frac{2}{3}(x_1 - x_0)$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = a^x$ para algum $a > 0$ ou $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. (Continuidade por conjuntos abertos) Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, se e somente se, $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto qualquer que seja o aberto $V \subset \mathbb{R}$.

4. (**Teorema de ponto fixo de Brouwer**) Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ uma função contínua. Prove que f possui um ponto fixo, isto é, existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = x$.

5. (Generalização do TVM para derivadas) Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas e deriváveis no intervalo (a,b). Então existe $c \in (a,b)$ tal que

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c).$$

Mostre que o clássico Teorema do Valor Intermediário para derivadas é um caso particular deste resultado.

6. (Generalização do TVM para integrais) Sejam f e g funções contínuas em $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Se g não possuir mudança de sinal em $[a,b]$, então existe $c \in [a,b]$, tal que

$$\int_a^b (fg)(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt.$$

Mostre que o clássico TVM para integrais é um caso particular do Teorema anterior.

7. (Generalização do TFC) Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\alpha, \beta : I \to [a,b]$ deriváveis. Defina $F : I \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$$

para todo $x \in I$. Mostre que F é derivável em I e além disso

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

Mostre que o clássico Teorema Fundamental do Cálculo é um caso particular deste resultado.

8. Teorema (de Cauchy para integrais repetidas): Mostre que se f é uma função integrável n vezes em $[a,b] \subset \mathbb{R}$, então

$$(J^{(n)}f)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds,$$

para todo $t \in [a,b]$ e qualquer que seja $n \in \mathbb{N}^*$.

Observação: Se f é uma função integrável em $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e $t \in [a,b]$, o operador integral J é o operador que a cada função integrável f em $[a,b]$ associa a função $(Jf) : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$(Jf)(t) = \int_a^t f(s)ds.$$

Isto posto, se (Jf) for novamente integrável em $[a,b]$, então

$$(J^{(2)}f) = (J(Jf))(t) = \int_a^t (Jf)(s)ds = \int_a^t \int_a^s f(w)dwds.$$

Quando tal fato ocorre, dizemos que f é duas vezes integrável e que $(J^{(2)}f)$ é a integral de ordem 2 da função f. Procedendo assim sucessivamente obtemos $(J^{(n)}f)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$.